Uitwerkingen tentamen Quantumfysica 1

6 maart 2000

Opgave 1

(a) De operator representaties van impuls en energie (Griffiths (1.35) en (1.37))

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{1}$$

(b) De tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking is (Griffiths (1.1))

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi. \tag{2}$$

Als $\psi(x,t) = u(t)\phi(x)$ dan kan door separatie van variabelen de tijdsonafhankelijke vergelijking worden afgeleid (Griffiths blz 22)

(c) Een hermitische operator A is gedefinieerd door (Griffiths (3.49))

$$A = A^\dagger. \tag{3}$$

Voor de eigenwaarden geldt dat ze reëel moeten zijn (Griffiths blz 93)

$$A\psi = \lambda\psi \rightarrow \lambda = \lambda^*. \tag{4}$$

Genormeerde eigenfuncties behorende bij verschillende eigenwaarden zijn orthonormaal (Griffiths blz 93)

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n \rightarrow \langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{n,m}. \tag{5}$$

d (i) p en $T = \frac{p^2}{2m}$ commuteren dus gemeenschappelijke eigenfuncties.

(ii) p en $V(x)$ commuteren niet dus geen gemeenschappelijke eigenfuncties.

Opgave 2

(a) Voor de afleiding zie Griffiths blz 53 tot 55, het resultaat is (Griffiths (2.111))

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar} e^{-mV_0|x|/\hbar^2}, \quad E = -\frac{mV_0^2}{\hbar^2} \tag{6}$$

(b) Voor de waarschijnlijkheid om het deeltje een afstand x (met marge dx) van de oorsprong te vinden geldt (Griffiths (1.3))

$$P = |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\frac{mV_0}{\hbar^2} e^{-2mV_0|x|/\hbar^2} \tag{7}$$

waarbij de factor 2 noodzakelijk is omdat het deeltje zowel op x als $-x$ kan zijn.

Opgave 3

(a) Voor de afleiding voor willekeurige (tijdsafhankelijke) operatoren zie Griffiths blz 113, het resultaat is (Griffiths (3.148))

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|[A, H]|\psi\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle \tag{8}$$

waaruit de bewering voor tijdsonafhankelijke A onmiddelijk volgt.

(b) Uit opgave 1(a) en

$$[\frac{\partial}{\partial x}, H] = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{9}$$

volgt eenvoudig dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle \tag{10}$$

(c) Ehrenfest's theorema is een voorbeeld van het correspondentieprincipe, klassieke wetten zijn in de quantummechanica nog steeds geldig indien voor functies verwachtingswaarden worden gebruikt.

Opgave 4

Dit probleem is in detail uitgewerkt in Griffiths blz 25 tot 29.

(a) De energie eigenwaarden zijn (let wel dat $a \to 2a$ hier tov Griffiths (2.23)!)

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} \tag{11}$$

(b) Voor de tijdsevolutie geldt (Griffiths (2.14))

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1\, e^{-iE_1t/\hbar} + \phi_2\, e^{-iE_2t/\hbar}). \tag{12}$$

(c) De kansen $P_-(t)$ en $P_+(t)$ worden gegeven door

$$P_-(t) = \int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\psi(x,t), \quad P_+(t) = \int_{0}^{-a} \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\psi(x,t). \tag{13}$$

Gebruik makend van de gegeven functies en integralen geeft dit

$$P_\pm(t) = \frac{1}{2} \pm \frac{4\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar t}{8ma^2}\right)}{3\pi}. \tag{14}$$

(d) De interpretatie van dit resultaat is dat het deeltje periodiek heen en weer beweegt tussen beide helften van de put. Let wel dat het zich nooit volledig in één van beide helften bevindt omdat de amplitude van de cosinus kleiner is dan een half.

Opgave 5

Het inproduct tussen $|\psi_i\rangle$ en $|\psi_f\rangle$ is gegeven door

$$\langle\psi_i|\psi_f\rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1+i}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{6}} + 0\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{2-i}{3} \tag{15}$$

De kans dat $|\psi_i\rangle$ zich in toestand $|\psi_f\rangle$ bevind is de absolute waarde hiervan

$$P = |\langle\psi_i|\psi_f\rangle|^2 = \frac{2-i}{3}\frac{2+i}{3} = \frac{5}{9} \tag{16}$$